ملاحظة:
إذا كانت نقطة اللانهاية صفراً من الرتبة k للدالة f عندئذٍ يكون منشور لوران لهذه الدالة ~~مقربة بعدم سببت~~ في ~~الجوار~~ اللانهاية من الشكل:

$$f(z) = \frac{b_k}{z^k} + \frac{b_{k+1}}{z^{k+1}} + \cdots$$

الفصل الرابع نظرية الرواسب

* لتكن $f(z)$ دالة متغير عقدي ولتكن z_0 نقطة شاذة لهذه الدالة عندئذٍ يكون لهذه الدالة التمثيل الآتي عند أية نقطة z من نقاط الجوار $0 < |z - z_0| < \delta$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad , \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

نقطة شاذة

ولتكن c_1 دائرة تحيط بالنقطة z_0 وتقع في هذا الجوار

وبمكاملة طرفي العلاقة السابقة على c_1 نجد أنّ:
نحو التكامل على كامل المنحني (الدائرة) للدوران الموجب

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_1} a_0\,dz + \int_{c_1} a_1 (z - z_0)\,dz + \cdots + \int_{c_1} a_n (z - z_0)^n\,dz + \cdots$$

$$+ b_1 \int_{c_1} \frac{dz}{z - z_0} + b_2 \int \frac{dz}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_{c_1} f(z)\,dz = b_1\, 2\pi i$$

• وندعو b_1 راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة الشاذة z_0 ونرمز لهذا الراسب بـ $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)$

أي أنّ:

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} f(z)\,dz$$

• من هذا التعريف نستنتج بأنه إذا كانت النقطة z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح فإن قيمة الراسب تكون معدومة أي أنّ:

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = 0$$

• أما عندما تكون z_0 قطباً بسيطاً للدالة f عندئذٍ استناداً إلى مبرهنة سابقة فيكون للدالة f منشور لوران الآتي:

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots$$

كل كثيرة حدود هي دالة تحليلية

ومنه فإنه:

$$(z-z_0)f(z) = b_1 + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^{n+1} + \cdots$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أنه:

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = b_1$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أنه إذا كان z_0 قطب بسيط فإن قيمة الراسب للدالة f عند هذا القطب تعطى بالعلاقة الآتية

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

أما إذا كان z_0 قطب من الرتبة m عندئذ يكون للدالة f المنشور الآتي ..

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \cdots$$

نضرب طرفي المساواة بـ $(z-z_0)^m$ فنحصل على.

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + b_{m-2}(z-z_0)^2 + \cdots + b_1(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m$$

$$+ a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة $m-1$ مرة نجد أنه

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = b_1 (m-1)! + a_0\, m(m-1) \cdots (m_0)(z-z_0) + \cdots$$

ومنه فإنه:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$$

وبالتالي:

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$$

لهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية

المبرهنة: (نظ)

إذا كانت $f(z)$ دالة منفردة و z_0 قطب لهذه الدالة

أولاً: فإنه عندما z_0 قطب من الرتبة الأولى فإنه:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

ثانياً: إذا كان z_0 قطب من الرتبة m فعندئذ:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$$

مثال -1-

لتكن لدينا الدالة $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{z^{2}}$ إن النقطة $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة لهذه الدالة.

الحل:

بما أنه $z=0$ صفر من الدرجة الثانية للمقام وصفر من الدرجة الأولى للبسط ⇐ فإنه $z=0$ هو قطب من الرتبة الأولى للدالة $f(z)$

$$b_1=\lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{z}-1}{z^{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}=\frac{0}{0}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}}{1}=1$$

ويمكن إيجاد هذا الراسب عن طريق النشر

مثال -2-

لتكن لدينا الدالة $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^{4}}$ عين النقاط الشاذة، أوجد قيمة الراسب عندها

الحل:

النقاط هي فقط النقطة $z=0$. علماً أنه $z=0$ صفر من الرتبة الرابعة للمقام وصفر من الدرجة الأولى للبسط هذا يعني أنه $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة f وعندئذ:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=b_1=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2}}{dz^{2}}(z)^{3}\frac{\sin z}{z^{4}}$$

$$=\frac{1}{2!}\lim\frac{d^{2}}{dz^{2}}\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{2}\lim\frac{d}{dz}\left(\frac{z\cos z-\sin z}{z^{2}}\right)$$

نحسب المشتقة أولاً ثم نأخذ النهاية

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(\cos z-z\sin z-\cos z)z^{2}-2z(z\cos z-\sin z)}{z^{4}}$$

$$\Rightarrow b_1=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-z^{3}\sin z-2z^{2}\cos z+2z\sin z}{z^{4}}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين ⇐ لإزالتها نستخدم أوبيتال

$$b_1=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^{2}\sin z-z^{3}\cos z-4z\cos z+2z^{2}\sin z+2\sin z+2z\cos z}{4z^{3}}$$

$$=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين لإزالتها نستخدم أوبيتال.

$$=\frac{1}{2}\lim\frac{-6z\sin z-3z^{2}\cos z-3z^{2}\cos z+z^{3}\sin z-4\cos z+4z\sin z+4z\sin z}{12z^{2}}$$

$$\rightarrow\quad+\frac{+2z^{2}\cos z+2\cos z+2\cos z-2z\sin z}{12z^{2}}=\frac{0}{0}$$

نعود ونستخدم أوبيتال ...

كملوها كالمعتاد

إن قيمة الراسب المطلوب أسفل ... 7

نحصل الحل بإخراج متمم الراسب عن طريق النشر

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \cdots$$

$$b_1 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \operatorname{Res}\frac{\sin z}{z^4} = -\frac{1}{6}$$

* اذا كانت z_0 نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فعندئذ متمم الراسب لهذه الدالة عند النقطة الشاذة الأساسية لا يمكن استخراجه إلا عن طريق النشر.

* مبرهنة التكامل: القاعدة الخاصة بالتكامل

ملاحظة: اذا كان $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ وكانت z_0 قطب بسيط للدالة $f(z)$ وحيث أن $p(z_0) \neq 0$ ، $q(z_0) = 0$ ، $q'(z_0) \neq 0$ عندئذ:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(z) = \frac{z+1}{z^2 - z}$ عين النقاط الشاذة وبين نوعها واحسب متمم الراسب عند كل نوع.

الحل: النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $z^2 - z = 0 \Leftarrow z = 0$ ، $z = 1$ وكل منهما صفر من الدرجة الأولى للمقام ولا يعدم البسط إذ أن $z = 0$ ، $z = 1$ كل منهما قطب بسيط

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{z+1}{2z-1}\right|_{z=0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left.\frac{z+1}{2z-1}\right|_{z=1} = \frac{2}{1} = 2$$

* والآن نظرية الرواسب

* مبرهنة التكامل، القاعدة الخامسة بالتكامل : سؤال على الصيغ تكامل كوشي

نظرية الرواسب : سؤال عن نظرية الرواسب

لتكن f دالة مستمرة تحليلية تملك عدد منته من النقاط الشاذة المعزولة $z_1, z_2, \dots z_k$
والتي تقع جميعها ضمن دائرة C_1 مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها R
عندئذ يكون:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

الإثبات:

بما أن $z_1, z_2, \dots z_k$ نقاط شاذة تقع في داخلية الدائرة C عندئذ
بإحاطة كل نقطة من هذه النقاط بدائرة C_j $(j=1,2,\dots k)$ حيث أن $C_j \cap C_e = \phi$
عندما $j \neq e$ واعتماداً على مبرهنة كوشي-جورسات للمناطق المتعددة الترابط يكون

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{C_k} f(z)\,dz$$

واستناداً إلى تعريف الراسب يكون:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) + \dots + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

أي أن:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) \qquad j \neq e$$

مثال

اعتماداً على مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_C \frac{2z}{z^2+1}\,dz$
حيث C هي الدائرة $|z| = 3$

الحل: الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها $R = 3$
النقاط الشاذة هي $z^2+1 = 0 \Leftarrow z^2 = -1 \Leftarrow z^2 = i^2 \Leftarrow$

$z_1 = i \wedge z = -i$

إن كل من $z_1 = i$ ، $z_2 = -i$ عبارة عن قطب بسيط (لأنه $z=i$ ، $z=-i$
كل منهما صفر من الدرجة الأولى للمقام ولا يعدم البسط) ⇐ وبالتالي فإنه

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2z}{2z}\Big|_{z=i} = 1 \quad , \quad \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2z}{2z}\Big|_{z=-i} = 1$$

($p(z)$ ، $q'(z)$)

$$\Rightarrow \int_c \frac{2z}{z^2+1}\, dz = 2\pi i\,(1+1) = 4\pi i$$

ط2: الآن، حل بطريقة صيغة تكامل كوشي:

اللفاف المغلق هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $R=3$

النقاط الشاذة هي $z_1 = i$ و $z_2=-i$ النقطتان تقعان في داخلية اللفاف.

نحيط $z_1 = i$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كافٍ
نحيط $z_2=-i$ بدائرة c_2 〃 〃 〃 〃 〃 ⇐ بحيث يكون $c_1 \cap c_2 = \phi$

$c_1 \cap c = \phi$ ، $c_2 \cap c = \phi$

عندئذٍ حسب مبرهنة كوشي-غورسا للمناطق المتعددة الترابط يكون:

$$\int_c \frac{2z}{z^2+1}\, dz = \int_{c_1} \frac{2z}{(z-i)(z+i)}\, dz + \int_{c_2} \frac{2z}{(z-i)(z+i)}\, dz$$

$$= \int_{c_1} \frac{\frac{2z}{z+i}}{z-i}\, dz + \int_{c_2} \frac{\frac{2z}{z-i}}{z+i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{2z}{z+i}\right]_{z=i} + 2\pi i \left[\frac{2z}{z-i}\right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\,.(1) + 2\pi i\,.(1) = 4\pi i$$

مثال 2.

اعتماداً على مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكامل $f(z) = \int_c \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)}\, dz$

حيث c هي الدائرة $|z|=2$

المقام يأتي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

الحل: اللفاف المغلق هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها $R=2$

النقاط الشاذة هي جذور معادلة المقام $z(z-3)(z+1)=0$

أي أن $z=3$, $z=-1$, $z=0$

• ونلاحظ بأن $z=0$ تقع في داخلية اللفاف

⇐ يكون صفر من الدرجة الأولى للبسط، وصفر من الدرجة الأولى للمقام ⇐ نقطة شاذة قابلة للإصلاح

⇐ $$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res} \frac{e^z-1}{z(z-3)(z+1)} = 0$$

• ونلاحظ بأن $z=-1$ صفر من الدرجة الأولى للمقام ولا ينعدم البسط ⇐ قطب بسيط

⇐ $$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^z-1}{z(z-3)(z+1)} = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{e^z-1}{z(z-3)(z+1)} = \lim \frac{e^z-1}{z(z-3)} = \frac{e^{-1}-1}{4}$$

أي أن:

$$\int_c \frac{e^z-1}{z(z+3)(z+1)}\, dz = 2\pi i\left(0 + \frac{e^{-1}-1}{4}\right)$$

مثال:
احسب قيمة التكامل $\int_c \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} dz$ حيث c هي الدائرة $|z|=1$

الحل: النقاط الشاذة هي فقط النقطة $z=0$

$$\frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right] \quad 0<|z|$$

$$= \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n+1}}+\cdots$$

وهذا يعني أن $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية لأن الجزء الرئيسي يتكون من عدد غير منته من الحدود، الراسب هو قيمة b_1 ؛ $b_1 = 1 \Leftarrow$

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = 1 \longrightarrow \int_c \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i$$

تعريف الراسب في اللانهاية:

لتكن $f(z)$ دالة متغير عقدي جميع نقاطها الشاذة تقع في داخلية الدائرة C التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها R

- ← هذا يعني أن الدالة في خارجية الدائرة هي دالة تحليلية
- ← وهذا يعني أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة معزولة.

اصطلح العلماء أن الاتجاه الموجب في اللانهاية للدوران هو الاتجاه الذي يوافق دوران عقارب الساعة

- ويتم تعريف قيمة الراسب للدالة f في اللانهاية من العلاقة:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-c} f(z)\, dz$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج أن قيمة الراسب عكس الحصول عليها من خلال منشور الدالة f بجوار اللانهاية وتعيين b_1 ومن ثم ضربه بـ -1

ملاحظة:
من خلال ما ذكرناه في آخر سطرين ومن خلال بداية المحاضرة نستنتج أنه إذا كانت نقطة اللانهاية صفر من الدرجة الثانية أو أكثر عندئذ فإن قيمة الراسب عند اللانهاية تكون مساوية الصفر.

مبرهنة: نهي في الخارج عن $|z|$

اذا كانت $f(z)$ دالة مفردة وكانت $z_1, z_2 \dots z_k$ نقاط شاذة لهذه الدالة عندئذٍ:

$$\sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z) = 0$$

الإثبات:

لتكن c دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R وبحيث أن جميع النقاط الشاذة للدالة f تقع في داخلية الدائرة عندئذٍ حسب مبرهنة الرواسب

$$\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z) \quad ---(1)$$

وحسب تعريف قيمة الراسب في اللانهاية نكون:

$$\underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-c} f(z)\, dz$$

نضرب الطرفين بـ $2\pi i$

ومنه فإنه:

$$2\pi i \underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z) = \int_{-c} f(z)\, dz$$

واعتماداً على خواص التكامل فإنه

$$2\pi i \underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z) = -\int_{c} f(z)\, dz \quad ---(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنه

$$\sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z) = 0$$

تمرين:

* احسب قيمة التكامل اعتماداً على مبرهنة الرواسب:

$$\int \frac{2z+3}{(z^6-64)(z+4)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{6} \underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z)$$

حيث c الدائرة $|z| = 3$

الحل: اللفاف هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=3$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $(z^6-64)(z+4) = 0$

أولاً $z=-4$ تقع في خارجية اللفاف وهو قطب بسيط لأنه:

(لأنه صفر من الدرجة الأولى للمقام ولا يعدم البسط)

$$z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z^6 = 64 \Rightarrow z = (64)^{\frac{1}{6}}$$

أو

واعتماداً على

$$\sum_{j=1}^{6} \underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=-4}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{\infty}{\operatorname{Res}} f(z) = 0$$

وعلماً أن نقطة اللانهاية هي صفر من الدرجة السادسة للدالة المتكاملة فإن:

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z) = 0$$

$$\underset{z=-4}{\operatorname{Res}} \frac{2z+3}{(z^6-64)(z+4)} = \lim (z+4) \frac{2z+3}{(z^6-64)(z+4)}$$

$$= \lim_{z \to -4} \frac{2z+3}{z^6-64} = \frac{-5}{4096-64} = \frac{-5}{4032}$$

ومنه فإن:

$$\sum_{j=1}^{6} \underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z) - \frac{5}{4032} + 0 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{6} \underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{5}{4032}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل المعطى: ⇐

$$= 2\pi i \left(\frac{5}{4032} \right) = \frac{5\pi i}{2016}$$

انتهت المحاضرة -12-